Лекция 7.

Гравитационные волны. Смешанные волны и отфильтрование внешних гравитационных волн

Цель: Дать описание гравитационных волн в атмосфере. Показать применение метода малых возмущений для решения уравнений для гравитационных волн.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Рассмотрим случай баротропной, однородной, несжимаемой атмосферы высотой h

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-lv+g\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+lu+g\frac{\partial h}{\partial y}=0 \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial h}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$u=\overline{u}(y)+u', v=v',\ h=\overline{h}(y)+h', \qquad (7.2)$$

При этом имеет место соотношение геострофичности:

$$\overline{u}=-\frac{g}{l}\frac{\partial \overline{h}}{\partial y} \qquad (7.3)$$

Гравитационные волны

Произведем линеаризацию относительно основного состояния:

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y}-lv'+g\frac{\partial h'}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v'}{\partial y}+lu'+g\frac{\partial h'}{\partial y}=0 \qquad (7.4)$$
$$\frac{\partial h'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial h'}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial h'}{\partial y}+\bar{h}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0$$

Рассмотрим случай независимости движения от y, также отсутствия силы Кориолиса:

$$\frac{\partial h'}{\partial y}=\frac{\partial v'}{\partial y}=l=0$$

Гравитационные волны

И мы получаем:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + g\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \qquad (7.5)$$
$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial h'}{\partial x} + \bar{h}\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

Ограничимся получением выражения для скорости перемещения волн. Для краткости рассмотрим лишь одну волну:

Пусть:

$$u' = Ue^{i(mx-\sigma t)}, \quad v' = Ve^{i(mx-\sigma t)}, \quad h' = He^{i(mx-\sigma t)} \qquad (7.6)$$

Гравитационные волны

Произведя соответствующие дифференцирования переменных, подставляя найденные выражения в систему, получаем:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma U+\bar{u}mU+gmH=0\\
&-\sigma V+\bar{u}mV=0\\
&-\sigma H+\bar{u}mH+\bar{h}mU=0
\end{aligned}
\qquad (7.7)
$$

Перепишем полученную систему:

$$
\begin{aligned}
(-\sigma+\bar{u}m)U \quad + \quad 0\cdot V \quad + \quad gmH=0\\
0\cdot U+(-\sigma+\bar{u}m)V+\quad 0\cdot H=0\\
\bar{h}mU \quad + \quad 0\cdot V+(-\sigma+\bar{u}m)H=0
\end{aligned}
\qquad (7.8)
$$

Гравитационные волны

Приравнивая определитель к нулю, получаем уравнение для определения σ:

$$(-\sigma+\bar{u}m)^3-m^2g\bar{h}(-\sigma+\bar{u}m)=0$$

$$(-\sigma+\bar{u}m)[(-\sigma+\bar{u}m)^2-m^2g\bar{h}]=0$$

$$\sigma_1=\bar{u}m,\quad \sigma_{2,3}=\bar{u}m\pm m\sqrt{g\bar{h}} \tag{7.9}$$

$$c_1=\bar{u},\quad c_{2,3}=\bar{u}\pm\sqrt{g\bar{h}} \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-lv+g\frac{\partial h}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+u\frac{\partial \Omega}{\partial x}+v\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\beta v+l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0;$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \qquad (7.11)$$

Для решения этой системы применим метод малых возмущений. Пусть $u=\bar{u}(y)+u'$; $v=v'$; $h=\bar{h}(y)+h'$. Кроме того, пусть, как и ранее, $\bar{u}=-\frac{g}{l}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}$, а h', u' и v' не зависят от y.

Имея в виду, что в этом случае $\Omega = \frac{\partial v'}{\partial x}$, и опуская члены, содержащие квадраты малых величин, получаем следующую систему из трех линейных уравнений:

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{\text{г}} - lv' + g\frac{\partial h'}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t\, \partial x} + \bar{u}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \beta v' + l\frac{\partial u'}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial h'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \bar{h}\frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \qquad (7.12)$$

(Заметим, что индексом г здесь и далее отмечен дифференциальный оператор). Решение системы будем искать в виде:

$$u' = \sum_{s=1}^{\infty} U_s e^{i(m_s x - \sigma_s t)} = \sum_{s=1}^{\infty} U_s e^{i m_s (x - c_s t)};$$

$$v' = \sum_{s=1}^{\infty} V_s e^{i(m_s x - \sigma_s t)} = \sum_{s=1}^{\infty} V_s e^{i m_s (x - c_s t)};$$

$$h' = \sum_{s=1}^{\infty} H_s e^{i(m_s x - \sigma_s t)} = \sum_{s=1}^{\infty} H_s e^{i m_s (x - c_s t)}, \qquad (7.13)$$

где U_s, V_s и H_s — амплитуды колебаний величин u', v' и h'. Для сокращения записи далее будем рассматривать лишь один из членов каждого ряда. При этом индекс s будет опускаться. Путем непосредственного дифференцирования соотношений (5.3) легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -imc; \quad \frac{\partial}{\partial x} = im; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -m^2; \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c\,\frac{\partial}{\partial x};$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) = (\bar{u} - c)\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

Учитывая эти соотношения и соотношение (7.3), систему (7.12) перепишем в виде:

$$[\beta - m^2(\bar{u} - c)]\, v' + l\frac{\partial u'}{\partial x} = 0;$$

$$-lv' + (\bar{u} - c)_{\text{г}}\frac{\partial u'}{\partial x} + g\frac{\partial h'}{\partial x} = 0;$$

$$-\frac{l}{g}\bar{u}v' + \bar{h}\frac{\partial u'}{\partial x} + (\bar{u} - c)\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$$

Будем рассматривать эти уравнения как систему для определения неизвестных: v', $\frac{\partial u'}{\partial x}$ и $\frac{\partial h'}{\partial x}$. Система имеет решение отличное от нуля в случае, если определитель этой системы равен нулю, т. е. если

$$\begin{vmatrix} [\beta - m^2(\bar{u} - c)] & l & 0 \\ -l & (\bar{u} - c)_{\text{г}} & g \\ -\frac{l}{g}\bar{u} & \bar{h} & (\bar{u} - c) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель получаем следующее уравнение для нахождения скорости c:

$$\left[\beta - m^2(\bar{u} - c)\right]\left[g\bar{h} - (\bar{u} - c)(\bar{u} - c)_r\right] - l^2\left[(\bar{u} - c) - \bar{u}\right] = 0. \qquad (7.14)$$

Это уравнение является уравнением третьего порядка. Ограничимся рассмотрением приближенных решений, которые имеют вид:

$$c_1 = \bar{u} - \frac{\beta + l^2\bar{u}/g\bar{h}}{m^2 + l^2/g\bar{h}}; \qquad (7.15)$$

$$c_{2,3} = \bar{u} \pm \sqrt{g\bar{h} + l^2/m^2}. \qquad (7.16)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. С помощью метода малых возмущений выведите систему уравнений для гравитационных волн;
2. Получите решение системы уравнений для гравитационных волн;